

2003年（第19回）日本国際賞受賞者 2003 (19th) Japan Prize Laureate



ブノワ・B・マンデルブロー博士(アメリカ合衆国)

エール大学数学部数理科学科教授
IBMトーマス・J・ワトソン研究所名誉特別研究員
1924年11月生まれ

Dr. Benoit B. Mandelbrot (United States of America)

Sterling Professor of Mathematical Sciences, Mathematics
Department, Yale University
IBM Fellow Emeritus, TJ Watson Research Center,
International Business Machines Corporation
Born on 1924

フラクタルと粗さの計測

私のライフワークは、主として、私が創始し、多方向に発展させ、そして命名したフラクタル幾何学である。この分野は、カオス理論と部分的に重複しており、粗さ（roughness）の理論の端緒と見ることができる。東ヨーロッパで生まれたことが私に燃えるような大志を抱かせるもととなった。時宜を得たフランスへの移住で命拾いをし、数学、科学、芸術などの特異であるが傑出した文化に出会った。後の米国への移住がこの大志と文化を開花させた。

20歳のとき、私の成績は私に平穏で快適な将来への権利をもたらしたが、それは私自身を抽象論に限定するということを前提としていた。幾何学と科学は滑らかで単純な現象に焦点を合わせていた。しかしながら、私は形式主義に反逆し、幸い私がおの才に恵まれていた視覚能力と想像力を利用することを望み、そして、ありのままの自然の粗さと限らない複雑さに魅了された。したがって、私は科学の踏みならされた道を捨て去ることを選び、以前に誰も住んでいなかった領域に引かれていった。独立独行の科学者として、私は非常に孤独で、困難に遭遇した。しかし、それが報いられ、50年前の私の博士論文を初めとして、私を複雑さの分野の開拓者にしてくれた。

フラクタル幾何学のいくつかのツールと概念が、私の目的と全く異なる多様な目的のために既に開発されていた。それらは、数学者が世界に背を向け、我々が見たり感じたりするものに無関係な理論を公表し始めた1875年～1925年に案出された強気な数学的奥義から生じた。私はそれらを方向転換させ、それらの数と融通性を増加させ、それらを具象的にし、多くの点で有用なものとした。私はまた、他の側面において、フラクタル性は人類発祥以来の経験の認識されていない部分であったことを徐々に発見した。今日では、フラクタルの世界は、数学、金融、多くの科学および多方面の工学を通して、多くの分野をつなぐ学環として認められていると思われる。

ユークリッドの標準幾何学がしばしば、灰色で、単調で、冷たく、無味乾燥であるとされるのはなぜだろうか？ 1つの理由は、それが雲、山、海岸線あるいは木の形を記述することができないことにある。雲は球でなく、山は円錐でなく、海岸線は円でなく、樹皮はなめらかでなく、稲妻は直線状には走らない。さらにより一般的には、自然の日常のパターンはあまりにも不規則で細分化されているので、標準幾何学では記述することができない。自然の多くの

ものの複雑さは、単に程度が高いだけでなく、全く異質である。実際的な目的のために、自然のパターンでは、長さの異なるスケールが無制限個ある。

同じ見方が、文化の多くの側面、すなわち、ヒトによって表現され、あるいは創られたパターンに当てはまる。それらは、絵画、建築物、および音楽の多様な側面はもちろん、偶然性と決定論的カオスの幾何学から金融チャートの形およびインターネット上のデータの流れにまで及んでいる。

さらに具体的に言うならば、ポアンカレは、問題としては、他人に聞いてみる問題と、自問する問題の2つがあるという。後者の自問する問題とはありふれた事柄であり、次に示す最初のいくつかの例のように、答えが見つからないと子供の問題として放っておかれる傾向にある。

- 破碎された石、金属、ガラス、あるいはさびた鉄のような通常の物体の粗さをどのようにして計測し、比較するのか？
- 英国の海岸はどれくらい長い？
- 地球、より精密には、山、海岸線、川、あるいは2つの川の分水界の間の境界線はどのような形状であろうか？すなわち、「幾何学」という言葉はそれが約束すると思われることを提供することができるであろうか？
- 嵐のときの風速はどのようにして定義するのか？
- 雲、炎、あるいは溶接はどのような形状であろうか？
- 宇宙における銀河の密度はどれほどであろうか？

このリストに対して、最近、次のような他の問題が加えられた。

- カオス力学系における2つの吸引領域の間の境界をどのようにして特徴づけるのか？
- インターネット上のメッセージの流れの変動をどのようにして計測するのか？
- 金融市場での取引価格の変動率をどのように

して計測するのか？

- 平面上の酔歩の境界をどのようにして特徴づけるのか？

これらの問題は、我々の自然観を変化させること、そして、標準幾何学が無定形とみなす形をうまく取り扱うことを要求している。私は、この要求に広くかつ具体的に応えて、自然および文化の新たな幾何学を構想し、創出した。フラクタルは、不規則性および（または）細分の程度がすべてのスケールで同じであることを表現する「スケーリング」と呼ぶある形式の不変性を満たしている。フラクタルは、曲線、表面、あるいは切れぎれの「ダスト」であることもあり、さらにはいくつかのものは以前には名称がなかった非常に奇妙な形状を有している。例えば、地球のレリーフや実際の物理的破面はフラクタル的表面である。価格記録は、マルチフラクタル関数である。私は、山、雲および価格記録をどのようにして模倣するのかを示した。私はまた、荒々しい、魔術的な新しい形をどのようにして創るかも示し、数学に対して、困難で刺激となる多くの問題を与えた。

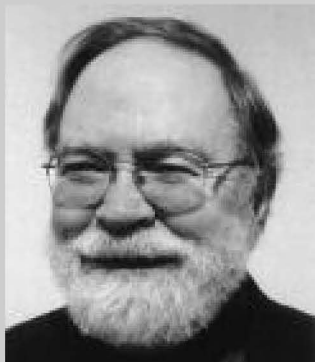
フラクタル性は科学のどこに位置するのか？多くの科学が、脳が感覚から受けとる基本メッセージを表現し、理解しようとする欲求から直接的に発生した。ほとんどの場合、次の3つの段階をかなり明確に識別することができる。すなわち、豊かな記述語彙を洗練化する段階、すべてがどのようにしてまとまっているかを再保証するメッセージを伴って「叙述」を洗練化する段階、および真の科学の段階である。

たとえば、視覚信号は大きさと形状、ならびに明度と色の語彙に結びつき、聴覚信号は音量と音律の高さの語彙に結びついた。これらの言葉の背後の概念（例えば、遠い昔から音楽家に知られているもの）が定量的になったときに、光学および音響学が生じた。同様に、重さと軽さ、および速さと遅さの感覚が力学に至り、熱さと冷たさの感覚が熱の理論に至った。質量と大きさの疑問の余地のない適切な尺度が、初期の書と歴史の幕開けを特徴づけている。均一な

熱さの適切な尺度である温度は、ガリレオにまでさかのぼる。このような背景に対して、先験的に同等に本質的である、滑らかさと粗さの感覚は無視された。

乱雑な感覚を定量的な科学に変換した最初の段階は、多くの科学でほぼ同じであった。音の科学は、完全であると主張したことはなかったが、健全な楽観主義により成功した。難しい問題を回避しつつ、歌と音楽における純粋な音を発見して久しい。弦楽器の理想的な音は、同時にかなり実際の、数学的に対処可能で、そして定量的計測につながる「アイコン」であることが証明された。それは、それが特徴づけたり、説明したりできない事実さえも明らかにする。より一般的に言えば、生の感覚が科学になるための長い過程の中での決定的な瞬間は、単純化と適用可能範囲の広さの間の適切な「妥協点」を見極める事に成功した時である。フラクタル幾何学は、温度が均一な熱さを計測するのと同様に、純粋な粗さを計測することができる初めて合意された数量なのである。

2003年（第19回）日本国際賞受賞者 2003 (19th) Japan Prize Laureate



ジェームズ・A・ヨーク博士（アメリカ合衆国）
メリーランド大学物理科学技術研究所数学、物理学教授
1941年生まれ

Dr. James A. Yorke (United States of America)

Distinguished University Professor of Mathematics and
Physics, Institute for Physical Sciences and Technology,
University of Maryland
Born in 1941

カオス動力的な現象

カオスは、我々すべてが知っている人類の永遠の真実である。すなわち、小さい攪乱またはわずかな事象が大きい事象につながる。ドストエフスキーのカラマーゾフ兄弟（1879年）において、年老いた司祭が次のような重要な真実を語っている。

「ある場所でのひと触れが地球の果てにおける動きを引き起こす。」

1972年にローレンツは次のように問いかけた。

「ブラジルにいる一頭の蝶の羽のはばたきがテキサスにおいてトルネードを引き起こすだろうか？」

ベンジャミン・フランクリンは、次第に重要性を増していく事象のカスケードが偶然の事象からどのように発生し得るかを述べた。

「釘を欲したために靴を失った。

靴を欲したために馬を失った。

馬を欲したために騎手を失った。

騎手を欲したために戦いを失った。

戦いを欲したために王国を失った。

結局、蹄鉄の釘を欲したためにすべてを失ったのだ。」

これらの著者はすべて、小さい事象が大きい事象を引き起こす状況について語っている。そ

して、そのような振る舞いが広く見られる時、その状況を“カオス的”と呼ぶ。カオス的状況は、短期的には予測可能であるが、長期的には予測不能である。1975年頃まで、自分たちの研究対象である単純な状況がこのように振る舞う可能性があることを認識していた科学者は、ほとんどいなかった。Henri Poincare（アンリ・ポアンカレ）、Steven Smale（スティーブン・スモール）と彼の共同研究者、Yasha Sinai（ヤシャ・シナイ）と彼のモスクワの同僚、京都の Yoshisuke Ueda（上田暁亮）、MIT の Edward Lorenz（エドワード・ローレンツ）および他の何人かの人々のみがそのような振る舞いに気づいた。しかしながら、大多数の科学者および技術者は、彼らのシステムが長期的にみて高度に予測可能な振る舞いを有していると思っていた。

1970年代の後期に、理解のブレークスルーがあった。多くの人々がいくつかの非常に単純な数学的システムが複雑な挙動を示すことに気づいていたが、これらは自分たちとは無関係の例外的現象であるとみなされていた。種々の分野の科学者がこれらの単純なシステムのカオス的挙動が彼らの研究分野の複雑なコンピュータシミュレーションに反映されているように思われ

ることを認識したときに、ブレイクスルーが起こった。科学者（数学者を含む）は、彼らが研究していたシステムが、電流や摩擦や流速やインフレーション速度やその他彼らの研究に関連した何らかのパラメータ値の選択に応じて、カオス的であることを、突然実感し始めた。

我々のグループは現在、US National Weather Service によって創られたモデルを研究している。それは、全地球の天候のモデルである。このモデルはコンピュータプログラムであり、それを実行するには、地球上の約20,000の地点ならびにこれらの各地点上の約30点（地上約300m、地上約600m、地上約900m等）における温度、風速、気圧および湿度の推定値が必要となる。我々がこれらのすべて、合計で約3,000,000個の推定値を与えれば、モデルは10分後の各推定値を出力する。これらの新しい数値をコンピュータに送り返せば、さらに10分後、すなわち開始20分後の温度、風速、気圧および湿度の予測値を得ることができる。このプログラムを繰り返して適用することによって、将来の任意の望む時点における推定値が得られる。ただしこの予測は完全ではなく、約3,000,000個の良い推定初期値を有していることに強く依存している。もしこれらの推定値がわずかでも不正確であるならば、モデルを反復適用することによって誤差が拡大し、やがて、モデルはその予測能力を失うことになる。

この複雑なモデルの諸特性を理解することは非常に困難であるため、我々はしばしば、 $x_{n+1} = 3.9 x_n (1 - x_n)$ のような極めて単純化したモデルを調べる。このモデルは、3百万個の代わりに1個の数、すなわち x のみに依存する。0と1の間の値をとる数字 x が現在のシステムの状態を表わし、 $3.9 x (1 - x)$ がある時間周期経過後のシステムの状態を表わすと想定してみよう。もし単純化したモデルが何らかの現実的意味を持つものであるならば、我々は x を正確に知ることはできないだろう。そこでもし任意の微小数値区間を選び、この区間における各数にこの関数を適用するならば、新しい区間の像が

得られ、そして、この過程を繰り返せば、さらに新しい区間の像が得られる。その過程を繰り返すにつれて、区間の大きさは通常増加し、適用するごとに長さがほぼ2倍になる。区間の長さは増加に増加を重ねる。0と1の間の任意の区間から始めても、最終的には大きな区間、すなわち、長さが少なくとも1/2の区間が得られる。

この性質がすべての微小区間に対して成り立つという事実の証明はなく、ほぼ確実に証明されないであろうが、少なくともそれが我々が観察することである。3.9という数を任意に少し変化させることができれば結果が異なることを、実は我々は知っている。決して大きくならない、いくつかの微小区間が存在するであろう。3.9に対する結果を立証するためには、3.9に任意に近い数、すなわち拡大特性が偽である数と区別する3.9の関連する特性を見つけなければならないだろう。

この挙動は予測可能性に関連している。写像を、たとえば1000回繰り返して適用する最初の点があって、あなたが知っているのはその点がある微小区間に存在することだけだとすれば、その区間のすべての点に写像を適用しなければならない。1000回適用後の微小区間の像はたいへん大きく、あなたが知っているのはその点があるその区間に存在するというだけで、予測する能力はほとんどない。

我々は、この単純な過程、すなわち、 x を $3.9 x (1 - x)$ で置きかえることを研究している。その理由は、それがカオスの現象の世界への窓であるからである。この過程の結果を確立する困難さは、より複雑な過程の結果を確立することがいかに困難かを暗示している。

天候に関する我々の研究は、カオスを間接的に用いて現在の天候のより良好な推定を得ることを目的としている。現在の誤差がより小さければ、現在から数日間は予測の誤差がより小さい。我々はまた、生存種における DNA の文字 (ACGT) の配列を決定するより良い方法を発見するためにカオスの概念を用いている。

例えば、日本は米のドラフト配列を報告した。米国の2つのグループがヒトゲノムの配列のドラフトを得たと報告した。しかし多くの作業が残っている。我々は、天候について用いているのと同様なカオスの概念を使って、費用をあまりかけずに配列のより正確なドラフトを決定することができると思っています。

ある過程がカオス的であると決定することは通常良い知らせでないが、それは、その過程と共存しなければならないすべての人にとって重要な知識である。